

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} T_z &\approx \delta A^2 T_z \frac{T_g^2}{T_z(T_z + 2T_g)}, \quad \delta \sim T_z^{1/2}, \\ \frac{d}{dt} T_g &\approx \gamma T_z, \quad \gamma \sim (T_z + 2T_g)^{-3/2}.\end{aligned}\quad (74)$$

Ihre asymptotische Lösung für große  $T_z/T_g$  lautet

$$\begin{aligned}T_g/T_0 &= (T_z/T_0)^{1/3}, \\ \frac{1}{T_z} \frac{d}{dt} T_z &= \lambda = \delta A^2 \left( \frac{T_0}{T_z} \right)^{1/3} \sim T_z^{-5/6};\end{aligned}\quad (75)$$

die Heizrate  $\lambda$  wird also in diesem Fall mit wachsender Energie kleiner und liegt zwischen den Werten  $\delta A^2 \sim T_z^{1/2}$  und  $\gamma \sim T_z^{-3/2}$ . Die Anisotropie vergrößert sich mit wachsender Energie.

Vergleichen wir die besprochenen Oszillations-Heizmechanismen, so erscheint die Gyro-Relaxation bei Anregung mit der Stoßfrequenz der Ionen  $\omega = \gamma_i$  vornehmlich geeignet, um die Ionenkomponente eines Plasmas auf sehr hohe Temperaturen zu bringen, wie sie zur Zündung eines thermonuklearen Fusionsreaktors benötigt werden. Zunächst ist die Gyro-Relaxation bei den anfänglich noch kleinen

mittleren freien Weglängen der Schallanregung mit der Schallumlauffrequenz  $\omega = \sqrt{\frac{5}{3}} \delta$  gegenüber vor teilhafter, da bei gleicher Modulationsamplitude und gleichem Wirkungsgrad eine größere Heizrate und Heizleistung erzielt werden kann, während die Schall anregung überdies eine sehr genaue Anpassung verlangt. Bei großen freien Weglängen ist die Gyro Relaxation der Teilchenbeschleunigung in Feldrich tung mit der Teilchenumlauffrequenz  $\omega = \delta$  überlegen, da diese Beschleunigung das kinetische Gleich gewicht im Plasma nachhaltig stört und eine ständig wachsende Anisotropie der Geschwindigkeitsverteilung erzeugt, die auch die Heizrate reduziert. Schließ lich ist es bei optimaler Ausnutzung der Gyro-Relaxation möglich, die Energie bevorzugt den Ionen zuzuführen, da die Heizrate der Elektronen für die gewählte Frequenz im Verhältnis der Stoßfrequenzen kleiner ist als die der Ionen.

Herrn Prof. Dr. A. SCHLÜTER möchte ich für die An regung zu dieser Arbeit, ihm und Herrn Dr. F. MEYER für zahlreiche fördernde Diskussionen herzlich danken.

## Die Raumladungsbremsung von Elektronenlawinen\*

Von K. J. SCHMIDT-TIEDEMANN \*\*

(Z. Naturforsch. 14 a, 989—994 [1959]; eingegangen am 31. März 1959)

The electric field generated by the positive and negative space charge of a single electron avalanche moving in a homogeneous electric field is calculated. Treating the interaction of the avalanche with its own space charge field as a first order perturbation, a growth formula is obtained which differs markedly from the common TOWNSEND formula. The theoretical results fit well with experimental data on avalanche statistics reported in the literature.

Die Ladungsverteilung in einer Elektronenlawine, welche sich in einem homogenen elektrischen Feld aus einem Elektron entwickelt, wird durch die Elektronen-Stoßionisierung (TOWNSENDscher Ionisierungskoeffizient  $\alpha$ ) sowie die Drift (Driftgeschwindigkeit  $v$ ) und Diffusion (Diffusionskoeffizient  $D$ ) der Elektronen bestimmt. Die positiven Ionen kann man ihrer geringen Beweglichkeit wegen näherungs weise als feststehend betrachten.

Solange das Raumladungsfeld der Lawine gegenüber dem homogenen Feld  $E_0$  vernachlässigbar ist, hängen  $\alpha$ ,  $v$  und  $D$  nur von der Gasart, der Gas dichte und der angelegten Feldstärke  $E_0$  ab. Die Elektronendichte besitzt dann die bekannte<sup>1</sup> kugel

förmige Verteilung mit radialem Dichteabfall ent sprechend einer GAUSS-Kurve  $\exp(-r^2/r_D^2)$ , und die Trägerzahl  $N$  wächst exponentiell mit der Zeit,  $N(t) \sim \exp(\alpha v t)$ .

Bei Lawinen, welche wesentlich über  $10^6$  Elektronen enthalten, wird der Einfluß des Raumladungsfeldes merklich. Das Feld am Ort des Lawinenkopfes wird durch die Ionen-Raumladung geschwächt, was zu einer Verringerung von  $\alpha$  und  $v$  führt („Raum ladungsbremung“). In erster Näherung ( $d^2\alpha/dE^2 = 0$ ) hat das von den Elektronen erzeugte Feld auf die mittlere Gasverstärkung keinen Einfluß, sondern lediglich auf die Geometrie des Lawinenkopfes.

In der vorliegenden Arbeit werden die Raum

\*\* Jetzt: Philips Zentrallaboratorium Hamburg, Hamburg Stellingen.

<sup>1</sup> J. S. TOWNSEND, Electricity in Gases, Oxford 1915.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

ladungsdichten und -Feldstärken der ungestörten („raumladungsfreien“) Lawine berechnet. Darauf aufbauend wird das Aufbaugesetz der raumladungsgebremsten Lawine aufgestellt und diskutiert. Mit den gewonnenen Ergebnissen läßt sich das experimentell (aus der Trägerzahlstatistik) ermittelte Trägervermehrungsgesetz befriedigend deuten.

### I. Ladungs- und Feldverteilung ungestörter Lawinen

**Bezeichnungen:** Zylinderkoordinaten  $\{\bar{r}, z\}$  (Azimut  $\varphi$  aus Symmetriegründen unterdrückt);  $\bar{r} = \{\bar{r}, z - v t\}$ ;  $r = |\bar{r}|$ ; Laufzeit der Lawine  $t$ ; Zentrum des Lawinenkopfes  $v t$ ; Diffusionsradius  $r_D = (4 D t)^{1/2}$ . Elementarladung  $\varepsilon$ , Raumladungsdichte der Elektronen, Ionen  $\rho^{e,i}$ ; Raumladungsfeldstärke der Elektronen, Ionen  $E^{e,i}$ ; Normierungsfeldstärke  $E = (4 \pi \varepsilon_0)^{-1} r_D^{-2} \exp(\alpha v t)$ .

Die Elektronen- und Ionenladungsdichten, wie sie sich unter der Wirkung von Gasverstärkung, Driftbewegung und Diffusion einstellen, sind gegeben durch<sup>2</sup>

$$\rho^e = -\varepsilon \pi^{-3/2} r_D^{-3} \exp\{\alpha v t - [\bar{r}^2 + (z - v t)^2] r_D^{-2}\}, \quad (1)$$

$$\rho^i = -\alpha v \int_0^t \rho^e(t') dt'. \quad (2)$$

Unter der Voraussetzung  $r_D \ll 2 v t$ , die wir im folgenden immer machen wollen, darf für die Integration von  $\rho^i$  in der Umgebung von  $z = v t$  die schwach veränderliche Funktion  $r_D(t')$  durch den festen Wert  $r_D = (4 D z/v)^{1/2}$  ersetzt werden<sup>2</sup>. Damit erhält man nach Ausführung des Integrals:

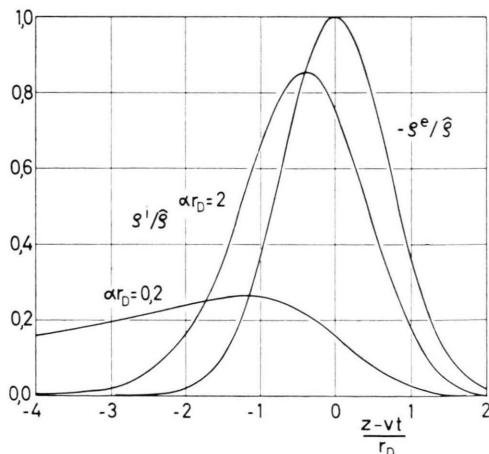


Abb. 1. Elektronen- und Ionendichte in der Achse der Lawine für verschiedene Werte von  $\alpha r_D$ . Es ist  $\hat{\rho} = \varepsilon \pi^{-3/2} r_D^{-3} e^{\alpha v t}$ .

<sup>2</sup> R. C. FLETCHER, Phys. Rev. **76**, 1501 [1949].

$$\rho^i = \varepsilon \alpha (2 \pi r_D^2)^{-1} \exp\{\alpha z - (\bar{r}/r_D)^2 + (\alpha r_D/2)^2\} \operatorname{erfc}\left\{\left[(z - v t)/r_D\right] + (\alpha r_D/2)\right\}. \quad (3)$$

Die Ladungsdichten in der Achse  $\bar{r} = 0$  sind in Abb. 1 für die Parameterwerte  $\alpha r_D = 0,2$  und  $\alpha r_D = 2$  aufgetragen.

Nach Gl. (1) ist die Elektronenladung kugelsymmetrisch um den Punkt  $z = v t$ ,  $\bar{r} = 0$  verteilt. Das Feld hat die Richtung zum Kugelmittelpunkt, sein Betrag ist nur vom Abstand  $r$  abhängig. Insbesondere sei der Lawinenkopf so weit von den Elektroden entfernt, daß der Einfluß von Spiegelladungen vernachlässigbar ist. Die Feldstärke ergibt sich dann als Lösung der Poisson-Gleichung zu

$$E^e = -\frac{r}{r} E M(r/r_D), \quad (4)$$

wobei die Funktion  $M(x)$  durch

$$M(x) = 4 \pi^{-1/2} x^2 \int_0^x e^{-p^2} p^2 dp = -\frac{d}{dx} \left( \operatorname{erf} \frac{x}{2} \right) \quad (5)$$

definiert ist. Sie läßt sich mit einem Fehler  $\leqq 10\%$  abschnittsweise durch elementare Funktionen approximieren (s. Abb. 2):

$$M(x) \approx M(1) \sin \frac{\pi}{2} x, \quad |x| \leq 1,4, \quad (6)$$

$$M(x) \approx x^{-2} \operatorname{sgn} x, \quad |x| \geq 2. \quad (7)$$

Die  $z$ -Komponente des Elektronenfeldes auf der Achse  $\bar{r} = 0$ ,

$$E_z^e = -E M(z - v t / r_D), \quad (8)$$

zeigt Abb. 3.

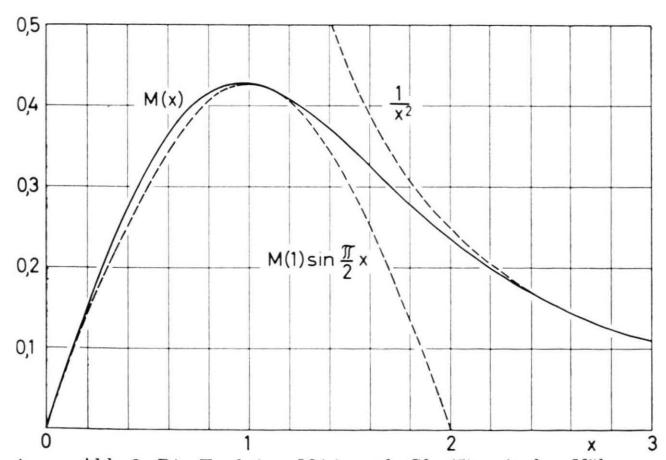


Abb. 2. Die Funktion  $M(x)$  nach Gl. (5) mit den Näherungen Gln. (6), (7).

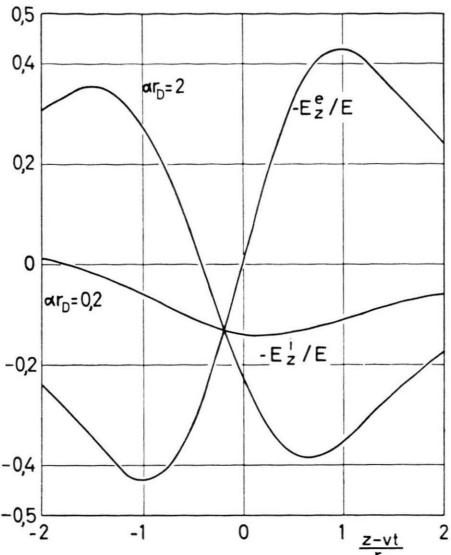


Abb. 3. Elektronen- und Ionenanteil der Raumladungsfeldstärke in der Lawinenachse für verschiedene Werte von  $\alpha r_D$ .

In Gl. (2) ist die Raumladungsdichte der positiven Ionen als Summation einzelner kugelsymmetrischer Ladungswolken dargestellt. Zur Berechnung des Feldes wird die Poisson-Gleichung zunächst für die einzelne kugelsymmetrische Ladungswolke gelöst [siehe Gl. (4)]. Das gesamte Ionenfeld ergibt sich durch Integration der jeweiligen Anteile der elektrischen Feldstärke am Aufpunkt. Zur Vereinfachung des Integrals setzen wir – wie bei der Berechnung der Ladungsdichte – den Diffusionsradius konstant. Die Bedingung  $r_D \ll 2vt$  für diese Näherung ist jetzt schärfer einzuhalten als bei der Berechnung der Dichte, da die Gewichtsfunktion  $M(x)$  für große  $x$  schwächer als  $\exp(-x^2)$  gegen Null geht [siehe Gl. (7)]. Auf eine genaue Abschätzung des Fehlers soll hier verzichtet werden. In den später zu besprechenden Experimenten ist  $r_D/vt \approx 10^{-1}$  oder kleiner.

Für die  $z$ -Komponente des Feldes in der Achse<sup>3</sup> erhält man damit

$$E_z^i = -\alpha v \int_0^t E_z^e(t') dt' \quad (9)$$

und nach Einsetzen von Gl. (8)

<sup>3</sup> Die übrigen Feldkomponenten sind durch Integration von Gl. (4) leicht zu erhalten. Aus Raumgründen möchten wir sie nicht explizit angeben.

<sup>4</sup> Einen ebenfalls konstanten Wert für  $G$  ergibt die Behandlung der Lawine als ebenes Problem bei konstanter Feldstärke an den Elektroden<sup>5</sup>. Die Annahme, daß sich alle

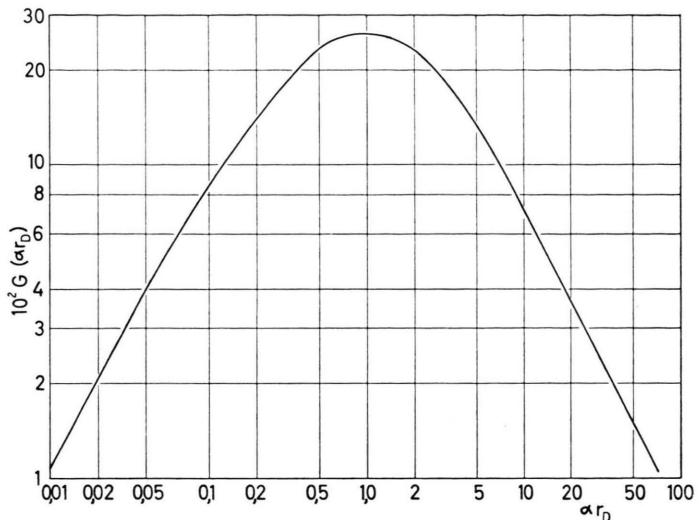


Abb. 4. Die Funktion  $G(\alpha r_D)$  nach Gl. (12).

$$E_z^i = E \exp\{\alpha(z - vt)\} \alpha r_D \quad (10)$$

$$\int_{(z-vt)/r_D}^{\infty} \exp(-\alpha r_D x) M(x) dx.$$

Das Integral ist nicht geschlossen auswertbar. Den Feldverlauf zeigt Abb. 3 für die Parameterwerte  $\alpha r_D = 0,2$  und  $\alpha r_D = 2$ .

Für  $\alpha r_D \ll 1$  ergibt sich unter Benutzung der Näherung Gl. (6)

$$E_z^i \approx E 2 \pi^{-1/2} \alpha r_D \quad (11)$$

$$\cdot \left[ 1 + \pi^{-1/2} \left( \cos \frac{\pi}{2} \frac{(z-vt)}{r_D} - 1 \right) M(1) \right].$$

Die Feldstärke  $E^i$  im Zentrum des Lawinenkopfes  $\bar{r} = 0$ ,  $z = vt$  hängt in normierter Gestalt nur von  $\alpha r_D$  ab:

$$E^i = E \cdot G(\alpha r_D). \quad (12)$$

Die Funktion  $G(\alpha r_D)$  zeigt Abb. 4. Dabei gilt für extreme Werte:

$$G \approx 2 \pi^{-1/2} \alpha r_D, \quad \alpha r_D \ll 1, \quad (13)$$

$$G \approx \frac{4}{3} \pi^{-1/2} (\alpha r_D)^{-1}, \quad \alpha r_D \gg 1,$$

und im Zwischengebiet<sup>4</sup>

$$G \approx \frac{2}{5} \pi^{-1/2} (\pm 10\%). \quad 0,4 \leq \alpha r_D \leq 2,5. \quad (14)$$

Ionen im Abstand  $\alpha^{-1}$  vom Lawinenkopf befinden<sup>6</sup>, führt auf  $G = (\alpha r_D)^2$ , ein vom vorstehenden wesentlich verschiedenes Ergebnis.

<sup>6</sup> J. SLEPIAN, Electrical World **91**, 761 [1928].

<sup>5</sup> G. FRANCIS, Proc. Phys. Soc., Lond. B **68**, 369 [1955].

## II. Aufbaugesetz und Trägerzahlstatistik raumladungsbremster Lawinen

Beim Einsetzen der Raumladungswirkung treten radiale Driftkomponenten auf, so daß die Ausdehnung der Lawine nicht mehr durch den Diffusionsradius  $r_D$ , sondern durch einen „Lawinenradius“  $r_L \geq r_D$  gegeben ist. Wie im vorigen Abschnitt wird auch im folgenden  $r_L$  als langsam veränderlich betrachtet und für die Integration des Raumladungsfeldes konstant gesetzt. Wir beschreiben die Vermehrung der Trägerzahl  $N(Z)$  durch einen Ionisierungskoeffizienten  $\alpha(Z)$ , der nur vom Ort  $Z = \int_0^t v dt$  des Zentrums des Lawinenkopfes abhängt:

$$N(Z) = n_0 \exp \int_0^Z \alpha(z) dz. \quad (15)$$

Die Lawine werde mit einem Elektron gestartet, d. h. zunächst ist  $n_0 = 1$  zu denken. Die Einführung eines freien Parameters  $n_0$  erweist sich für die Behandlung statistischer Probleme (s. u.) als vorteilhaft.

Der effektive Ionisierungskoeffizient  $\alpha$  ist gegeben durch

$$\alpha = (\varepsilon N)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty \alpha(z, \bar{r}, t) \rho^e 2 \pi \bar{r} d\bar{r} dz. \quad (16)$$

Für  $\alpha(z, \bar{r}, t)$  wird unter Vernachlässigung der Radialabhängigkeit eine lineare Näherung angesetzt:

$$\alpha(z, \bar{r}, t) = \alpha_0(E_0) - \frac{d\alpha}{dE} \Big|_{E_0} \cdot E_z^i. \quad (17)$$

Für  $\alpha r_D \ll 1$  ergibt sich, wenn die Näherung Gl. (11) für  $E_z^i$  eingeführt wird:

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{d\alpha}{dE_0} \omega E^i, \quad \omega = 0,8889. \quad (18)$$

Das Ionenfeld  $E^i$  im Zentrum der Lawine erhält man durch Verallgemeinerung von Gl. (9) auf variables  $\alpha$ , wenn noch  $v dt = dz$  als Integrationsvariable eingeführt wird:

$$E^i = \varepsilon (4 \pi \varepsilon_0)^{-1} r_L^{-2} \int_0^Z N(z) \alpha(z) M\left(\frac{Z-z}{r_L}\right) dz. \quad (19)$$

Kombination von Gln. (15), (18) und (19) liefert die Trägerzahlgleichung

$$\frac{dN}{dZ} = \alpha_0 N - \frac{d\alpha}{dE_0} \frac{\omega \varepsilon}{4 \pi \varepsilon_0 r_L^2} N \int_0^Z M\left(\frac{Z-z}{r_L}\right) \frac{dN}{dz} dz. \quad (20)$$

Wir lösen diese nichtlineare Integrodifferentialgleichung näherungsweise, indem wir unter dem Integral für die Ableitung der Trägerzahl das TOWNSENDsche Gesetz annehmen:

$$\frac{dN}{dz} = \frac{dN}{dZ} \exp\{(Z-z) \alpha(Z)\}. \quad (21)$$

Dann folgt

$$\frac{dN}{dZ} = \alpha_0 N - \frac{d\alpha}{dE_0} \frac{\omega \varepsilon}{4 \pi \varepsilon_0 r_L^2} N^2 G(\alpha r_L), \quad (22)$$

wobei  $G(\alpha r_L)$  das bereits in Gl. (12) diskutierte bestimmte Integral ist. Da  $\alpha r_L \ll 1$  vorausgesetzt ist, dürfen wir den Wert aus Gl. (13) einsetzen und erhalten nach der Integration das Trägervermehrungsgesetz:

$$\lambda N \exp(\lambda N) = \lambda N_T, \quad \alpha r_L \ll 1, \quad (23)$$

$$\lambda = \frac{d\alpha}{dE} \Big|_{E_0} \frac{\omega \varepsilon}{2 \pi^{3/2} \varepsilon_0 r_L}, \quad (24)$$

$$\alpha = \alpha_0 / (1 + \lambda N). \quad (25)$$

Hierin ist zur Abkürzung diejenige Trägerzahl  $N_T$  eingeführt worden, welche sich im gewöhnlichen TOWNSEND-Aufbau ohne Berücksichtigung der Raumladung ergäbe:

$$N_T = n_0 \exp(\alpha_0 Z). \quad (26)$$

Man darf auch für den Fall  $\alpha r_L \approx 1$  annehmen, daß sich das effektive Ionenfeld nur um einen konstanten Faktor  $\omega'$  vom Feld im Zentrum des Lawinenkopfes unterscheidet. Dann folgt durch Einsetzen der entsprechenden Näherung für  $G(\alpha r_L)$  aus Gl. (13) das Vermehrungsgesetz

$$\mu N = \mu N_T / (1 + \mu N_T), \quad \alpha r_L \approx 1, \quad (27)$$

$$\mu = \frac{d\alpha}{dE} \Big|_{E_0} \frac{\omega' \varepsilon}{10 \pi^{3/2} \varepsilon_0 \alpha_0 r_L^2}, \quad (28)$$

$$\alpha(Z) = \alpha_0 (1 - \mu N). \quad (29)$$

Während für  $\lambda N$ ,  $\mu N \ll 1$  beide Gesetze in die (raumladungsfreie) TOWNSEND-Formel  $N = N_T$  übergehen, liefert Gl. (23) für  $Z \rightarrow \infty$  einen linearen Anstieg von  $N$  mit  $Z$ , und Gl. (27) führt zu einer maximal erreichbaren Trägerzahl  $\mu^{-1}$ . Abb. 5 zeigt eine graphische Darstellung. Man entnimmt daraus, daß beim Beginn der Raumladungswirkung beide Gesetze einen sehr ähnlichen Verlauf zeigen<sup>7</sup>; man darf folglich auch bei  $\alpha_0 r_D \leq 1$  die Gl. (23) näherungsweise benutzen. Bei höheren  $\alpha_0 r_L$ -Werten ist man allerdings gezwungen, zunächst Gl. (27) anzu-

<sup>7</sup> Beide Gesetze differieren für  $\lambda = \mu$  in der Reihenentwicklung nach  $\mu N_T$  erst im quadratischen Glied.

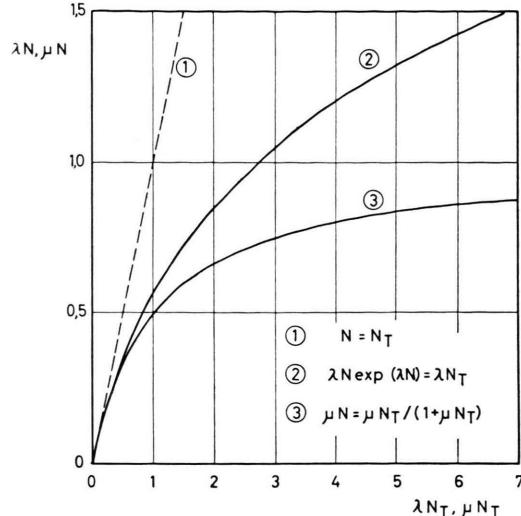


Abb. 5. Trägervermehrungsgesetze im raumladungsfreien Fall (Kurve 1) sowie für schwache ( $\alpha r_D \ll 1$ , Kurve 2) und starke ( $\alpha r_D \approx 1$ , Kurve 3) Raumladungsbremseung.

wenden und, wenn  $\alpha r_L$  so weit abgesunken ist, daß es in den Bereich der Näherung  $\alpha r_L \ll 1$  fällt, auf Gl. (23) überzugehen. Der Fall  $\alpha r_L \gg 1$  wurde bisher experimentell nicht realisiert.

Im TOWNSEND-Bereich lassen sich die statistischen Trägerzahl Schwankungen einzelner Elektronenlawinen für  $N > 10^4$  näherungsweise durch eine statistisch schwankende fiktive Primärelektronenzahl  $n_0$  beschreiben, d. h. die Lawinengröße ist durch Gl. (26) gegeben, wobei  $\exp(\alpha_0 Z)$  für alle Lawinen den gleichen Wert besitzt, während  $n_0$  entsprechend der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$w(n_0) = \exp(-n_0) \quad (30)$$

statistisch schwankt<sup>8</sup>. Raumladungswirkungen setzen bei  $N \geq 10^6$  ein, d. h. in einem Trägerzahlbereich, in dem die Ausbildung der statistischen Verteilung bereits als abgeschlossen betrachtet werden kann. Unter der Voraussetzung, daß in die Raumladungswirkung keine weiteren statistisch schwankenden Parameter eingehen, sind das Aufbaugesetz  $N(n_0)$  und die Wahrscheinlichkeitsdichte  $W(N)$  folgendermaßen verknüpft:

$$W(N) = \frac{dn_0}{dN} \exp[-n_0(N)], \quad (31)$$

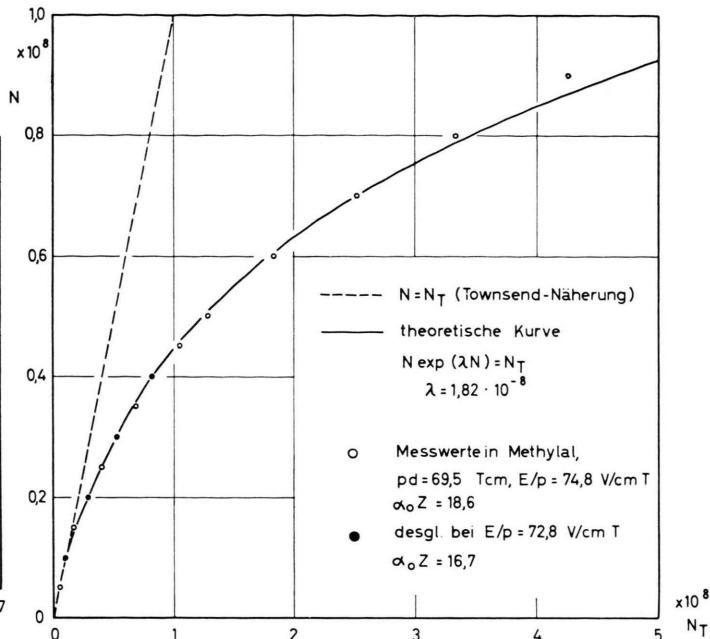


Abb. 6. Vergleich der Theorie Gl. (23) mit experimentellen Daten. Die Meßpunkte wurden aus den Resultaten von SCHLUMBOHM [6] mit Hilfe von Gl. (32) gewonnen.

$$n_0(N) = -\log \int_N^\infty W(x) dx. \quad (32)$$

Man gewinnt  $W(N)$  unter dem Einfluß der Raumladung durch Einsetzen der Trägervermehrungsgesetze Gl. (23), (27) bzw. eines aus beiden kombinierten Gesetzes in Gl. (31). Aus Raumgründen möchten wir diese Formeln nicht explizit hinschreiben.

### III. Diskussion der Ergebnisse

Aus vorliegenden Messungen<sup>9</sup> der Trägerzahlstatistik  $W(N)$  wurde das Aufbaugesetz nach Gl. (32) entnommen und mit der theoretischen Kurve  $N(N_T)$  verglichen. Aus Abb. 6 entnimmt man zunächst, daß der Raumladungseffekt beträchtlich ist ( $N$  geht bis auf 20% von  $N_T$  herunter) und durch Gl. (23) gut wiedergegeben wird.

Zur Anpassung der Kurven stehen die Parameter  $\alpha_0 Z$  und  $\lambda$  zur Verfügung. Beide Meßreihen liefern (im Rahmen der Meßgenauigkeit) das gleiche  $\lambda$ , woraus man  $r_L = 6.8 \cdot 10^{-2}$  cm berechnet. Direkte

<sup>8</sup> W. LEGLER, Z. Phys. **140**, 221 [1955].

<sup>9</sup> H. SCHLUMBOHM, Z. Phys. **151**, 563 [1958].

Messungen des Lawinenradius unter den obigen Bedingungen sind nicht bekannt. Die Diffusionstheorie liefert unter der Annahme einer mittleren Elektronenergie von 5 eV :  $r_D \approx 3,2 \cdot 10^{-2}$  cm. Vermutlich wird der Lawinenkopf bereits durch radiale Driftkomponenten oder andere Effekte aufgeweitet. Die aus der Kurve entnommenen  $\alpha_0 Z$ -Werte 18,6 bzw. 16,7 stehen mit den von SCHLUMBOHM mitgeteilten<sup>9, 10</sup> (18,6 und 16,5 im ersten Fall, 17,4 und 14,5 im zweiten Fall) in Übereinstimmung.

Abschließend sei noch eine allgemeine Bemerkung zur Lawinenstatistik erlaubt. Die Theorie enthält als wesentliche Voraussetzung, daß  $n_0$  als einziger Parameter statistischen Schwankungen unterworfen ist. Ähnlich wie die Stoßionisation unterliegt auch die Diffusion einem Schwankungsgesetz, und auch hier sollte man, insbesondere infolge der starken Kor-

relation<sup>11</sup> in der Entwicklung der Lawine, Schwankungen von  $r_D$  erwarten, welche die Gln. (31), (32) modifizieren würden. Hierüber liegen bisher weder experimentelle noch theoretische Untersuchungen vor. Man darf jedoch aus der guten Übereinstimmung der vorliegenden Theorie mit der Erfahrung den Schluß ziehen, daß diese Schwankungen die Form des aus der Statistik ermittelten Aufbaugesetzes nicht wesentlich beeinflussen.

Der Autor ist den Herren Dipl.-Phys. L. FROMMHOLD und Dipl.-Phys. J. PFAUE für fruchtbare Diskussionen und kritische Durchsicht des Manuskriptes sowie Herrn Ing. S. KÖNIG für seine Hilfe bei den numerischen Rechnungen zu Dank verpflichtet.

<sup>10</sup> H. SCHLUMBOHM, Z. Angew. Phys. **11**, 156 [1959].

<sup>11</sup> Zum Zeitpunkt jeder Stoßionisation befinden sich zwei Elektronen erzwungenermaßen im gleichen Volumenelement.

## NOTIZEN

### Zur Voraussage der Photoerzeugung von $\pi^+$ nach der Dispersionsmethode

Von K. DIETZ und G. HÖHLER

Institut für theoretische Physik der Universität München  
(Z. Naturforschg. **14 a**, 994—996 [1959]; eingegangen am 24. August 1959)

Die Theorie der Photoerzeugung von CHEW et al.<sup>1</sup> benutzt relativistische Dispersionsrelationen, um die Photoamplituden durch die Phasen der  $\pi - N$ -Streuung, die Kopplungsstärke  $f^2$  der Pion-Nukleon-Wechselwirkung und das magnetische Moment des Nukleons auszudrücken. Während bei der  $\pi^+$ -Erzeugung am Proton das Hauptinteresse in letzter Zeit dem Einfluß des Retardierungsterms bei kleinen Winkeln galt, haben kürzlich verschiedene Autoren darauf hingewiesen, daß bei größeren Winkeln und Energien oberhalb von 260 MeV die experimentellen Wirkungsquerschnitte zum Teil erheblich kleiner sind als die Voraussagen<sup>2—4</sup>. In der vorliegenden Note wollen wir zeigen, daß ein wesentlicher Teil der Abweichungen mit der Wahl der einzusetzenden Streudaten zusammenhängt und daß es verfrüht wäre, von einer ernsthaften Diskrepanz zwischen den Voraussagen nach der Dispersionsmethode und den Experimenten zu sprechen.

In nullter Näherung kann man die Photoerzeugung von  $\pi^+$  zwar aus dem Zusammenwirken eines über die

Bildung des Isobars verlaufenden Resonanzprozesses  $\gamma + p \rightarrow I^+ \Rightarrow n + \pi^+$  und der störungstheoretisch berechneten direkten Erzeugung (Eichinvarianzterm + Retardierungsterm) verstehen, aber bei einem quantitativen Vergleich dürfen die kleinen Phasen nicht vernachlässigt werden<sup>2</sup>.

Da sie noch nicht gut bekannt sind und auch die Energieabhängigkeit von  $\alpha_{33}$  noch Unsicherheiten aufweist, haben LAZARUS et al. die *effective-range*-Formeln von CHEW et al.<sup>5</sup> zugrunde gelegt und sich bei den s-Phasen mit der Streulänge begnügt. URETZKY et al. haben auch noch andere, z. Tl. willkürliche Annahmen über die kleinen Phasen gemacht, FRAZER hat sie ganz vernachlässigt.

Aus Abb. 1 kann man entnehmen, daß die von LAZARUS et al. benutzten  $\alpha_{33}$ -Werte (gestrichelte Kurve) systematisch von den Ergebnissen der Phasenanalysen abweichen. Abb. 2 zeigt, daß von den kleinen p-Phasen nur  $\alpha_{31}$  einigermaßen mit der *effective-range*-Näherung übereinstimmt, während  $\alpha_{13}$  und  $\alpha_{11}$  wesentlich andere Werte annehmen.

Es gibt auch kein gutes theoretisches Argument zugunsten der *effective-range*-Näherung in dem hier interessierenden Energiebereich<sup>6</sup>. CHEW et al.<sup>5</sup> haben selbst darauf hingewiesen, daß ihre Aussagen über die kleinen Phasen recht unsicher sind. Wir haben daher bei der Voraussage für die  $\pi^+$ -Erzeugung als Streudaten stets die Ergebnisse der Phasenanalysen eingesetzt und nach Möglichkeit den aus der Unsicherheit der Phasen folgenden Fehler angegeben.

<sup>1</sup> G. F. CHEW, M. L. GOLDBERGER, F. E. LOW u. Y. NAMBU, Phys. Rev. **106**, 1345 [1957].

<sup>2</sup> J. L. URETZKY, R. W. KENNEY, E. A. KNAPP u. V. PEREZ-MENDEZ, Phys. Rev. (Lett.) **1**, 12 [1958].

<sup>3</sup> W. R. FRAZER, unveröffentlicht, UCRL 8621.

<sup>4</sup> A. J. LAZARUS, W. K. H. PANOFSKY u. F. R. TANGHERLINI, Phys. Rev. **113**, 1330 [1959].

<sup>5</sup> G. F. CHEW, M. L. GOLDBERGER, F. E. LOW u. Y. NAMBU, Phys. Rev. **106**, 1335 [1957].

<sup>6</sup> Vgl. auch die Diskussion bei DIETZ u. HÖHLER, Z. Phys., im Druck, und den dort abgebildeten CHEW-Low-Plot.